TITLE:
3次元ド・ジッター空間の平均曲率1をもつ曲面(部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり)

AUTHOR(S):
山田, 光太郎

CITATION:
山田, 光太郎. 3次元ド・ジッター空間の平均曲率1をもつ曲面(部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり). 数理解析研究所講究録 2008, 1577: 1-5

ISSUE DATE:
2008-01

URL:
http://hdl.handle.net/2433/81368

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1577 巻 2008 年 1-5

3 次元ド・ジッター空間の平均曲率 1 をもつ曲面

山田光太郎

正の定曲率ローレンツ空間形である 3 次元ド・ジッター空間内の平均曲率 1 の空間的曲面で完備なものは全臍的なものしかないことが知られているが，特異点を許すならば，多くの例があり，興味深い研究対象である．また，双曲型空間の平均曲率 1 の曲面やユークリッド空間の極小曲面に対して知られているワイエルストラス表現公式の類似がある．これを用いて，特異点をもつ平均曲率 1 の曲面について得られた大域的な結果を紹介する．

ド・ジッター空間 S^3_1 は 4 次元ミンコフスキー空間 L^4 の一葉双曲面として実現される，断面曲率 1 をもつローレンツ空間型である：

$$
\begin{aligned}
S^3_1 &:= \{x \in L^4 \mid \langle x, x\rangle = 1\} \\
&= \{X \in \mathrm{Herm}(2) \mid \det \mathrm{X} = -1\} \\
&= \{a e_3 {}^t\bar{a} \mid a \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})\} = \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})/\mathrm{SU}(1,1) \qquad \left(e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

ここで，4 次元ミンコフスキー空間 L^4 の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は符号 $(-,+,+,+)$ を持つとし，L^4 と 2×2 のエルミート行列全体の集合 $\mathrm{Herm}(2)$ を

$$
L^4 \in (x_0, x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + \sqrt{-1}x_2 \\ x_2 - \sqrt{-1}x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(2)
$$

のように対応づけている．また，

$$
\mathrm{SU}(1,1) = \left\{X \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C}) \mid X e_3 {}^t\overline{X} = e_3\right\}
$$

である．

ド・ジッター空間を $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})/\mathrm{SU}(1,1)$ とみなしたとき，標準的な射影 $\pi_S\colon \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C}) \to S^3_1$ は

$$
\pi_S\colon \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C}) \ni a \longmapsto a e_3 {}^t\bar{a} \in S^3_1.
$$

であたえられる．

研究集会「部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり」
2007 年 7 月 11 日〜13 日，京都大学数理解析研究所
藤森祥一，Wayne Rossman, 梅原雅顕，Seong-Deog Yang 各氏との共同研究 [5] に基づく．

3 次元双曲型空間 $H^3 = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})/\mathrm{SU}(2)$ は L^4 の二葉双曲面として実現できる．上と同様にして，射影 π_H を

$$\pi_H\colon \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C}) \ni a \longmapsto a^t\bar{a} \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})/\mathrm{SU}(2) = H^3.$$

で表される．

リーマン面 M^2 上で定義された正則写像 $F : M^2 \to \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ が**等方的**，*null* であるとは，$\det(dF/dz)$ が恒等的に 0 となることである．ただし z は M^2 の複素座標である．Bryant は [2] で，等方的はめこみ $F\colon M^2 \to \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ の射影 $\pi_H \circ F\colon M^2 \to H^3$ は，平均曲率 1 の曲面 (CMC-1 曲面) をあたえることを示した..

一方，$\pi_S \circ F$ は S^3_1 の平均曲率 1 の（一般に特異点をもつ）空間的曲面をあたえる [1]．とくに，S^3_1 の完備な空間的 CMC-1 曲面は，全臍的であることが知られている．しかし，特異点を許すならば，さまざまな興味深い例が存在する (たとえば [7], [4]) したがって，CMC-1 曲面の概念を，特異点を許すものに拡張することは自然である．実際，[3] において藤森は CMC-1 **面** (CMC-1 *faces*) の概念をあたえた．この定義は，3 次元ミンコフスキー空間の特異点をもつ極大曲面のあるクラス（極大面，maxface, [10]）の類似である．CMC-1 面に対して，つぎのワイエルストラス ([1] の一般化) が成り立つ：

定理 1 (表現公式 [3])**.** 2 次元多様体 M^2 上で定義された可微分写像 $f\colon M^2 \to S^3_1$ が CMC-1 面であるためには，M^2 の複素構造と，それに関して正則な等方的はめこみ $F\colon \widetilde{M}^2 \to \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ が存在して $f = \pi_S \circ F$ となることが必要十分である．ただし $\widetilde{M}^2$ は M^2 の普遍被覆である．

この F を CMC-1 面 f の**正則持ち上げ**という．

定義 2. 定理 1 の状況で，正則持ち上げを $F = (F_{ij})$ と書き，

$$G = \frac{dF_{11}}{dF_{12}} = \frac{dF_{21}}{dF_{22}}, \qquad g = -\frac{dF_{12}}{dF_{11}} = -\frac{dF_{22}}{dF_{21}}, \qquad \omega = F_{11}dF_{21} - F_{21}dF_{11}.$$

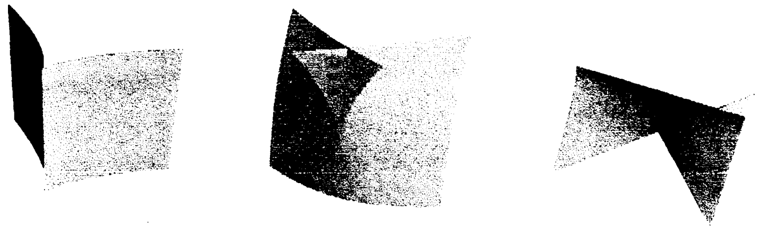
と定める．正則写像 $G\colon M^2 \to \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ と $g\colon \widetilde{M}^2 \to \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ はそれぞれ**双曲的ガウス写像**，**第二ガウス写像**とよばれる．組 (g, ω) を f の**ワイエルストラス・データ**とよぶ．

これらは，双曲型空間 H^3 の CMC-1 曲面のワイエルストラス・データ [9] と同じものである．ワイエルストラス・データを用いると，f による誘導計量は $ds^2 = (1 - |g|^2)^2|\omega|^2$ と表すことができる．

補題 3. 点 $p \in M^2$ が CMC-1 面 f の特異点であるための必要十分条件は，第二ガウス写像 g が $|g(p)| = 1$ を満たすことである．

特異点の判定条件 [6] を用いれば次がわかる．

定理 4 (藤森-佐治-梅原-山田 [6])**.** CMC-1 面のジェネリックな特異点は，cuspidal edge, swallowtail, cuspidal cross cap (図 1) である．



a cuspidal edge　　a swallowtail　　a cuspidal cross cap

図1　CMC-1 面のジェネリックな特異点

特異点をもつが，複素解析的なデータで表現できることから，CMC-1 面の大域的な性質を研究することは自然である．そのために完備性の概念を定義しよう：

定義 5 (完備性). CMC-1 面 $f\colon M^2 \to S^3_1$ が完備であるとは，コンパクト部分集合 $C \subset M^2$ と，M^2 上の対称 2 テンソル T で，$M^2 \setminus C$ 上 $T = 0$，かつ $ds^2 + T$ が M^2 上の完備リーマン計量となるものが存在することである．

定義から，完備 CMC-1 面の特異点集合はコンパクトである．

命題 6 (藤森-Rossman-梅原-Yang-山田 [5]). 完備 CMC-1 面 $f\colon M^2 \to S^3_1$ に対して定理 1 の複素構造を用いて M^2 をリーマン面とみなす．このとき，コンパクト・リーマン面 $\overline{M}^2$ と有限個の点 $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset \overline{M}^2$ が存在して，M^2 は $\overline{M}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ と双正則同値になる．

命題 6 の p_j を CMC-1 面 f の端またはエンドと呼ぶ．双曲的ガウス写像 G は M^2 上の有理型関数であるから，各端 p_j は G の孤立特異点である．とくに G の高々極であるような端を**正則端** regular end，真性特異点であるような端を**非正則端**とよぶ．これらの用語は，双曲型空間 H^3 の CMC-1 曲面の場合と同様である．

以上の準備のもと，主定理を述べる：

定理 7 (Osserman 型不等式，藤森-Rossman-梅原-Yang-山田 [5]). 完備 CMC-1 面 $f\colon M^2 = \overline{M}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \to S^3_1$ の双曲的ガウス写像 G は

$$2 \deg G \geq -\chi(M^2) + n = -\chi(\overline{M}^2) + 2n$$

を満たす．ただし $\overline{M}^2$ はコンパクト・リーマン面である．さらに，等号が成立するための必要十分条件は，すべての端が正則かつ properly embedded となることである．

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の完備極小曲面のガウス写像は曲面 M^2（をリーマン面とみなすと）正則写像 $G\colon M^2 \to S^2 = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ とみなすことができ，定理 7 と同様の主張が成り立つ．さらに，この場合 $2\pi \deg G$ は絶対全曲率なので，全曲率に関する不等式

$$\int_{M^2} (-K)\, dA = 2\pi \deg G \geq -\chi(M^2) + n = -\chi(\overline{M}^2) + 2n$$

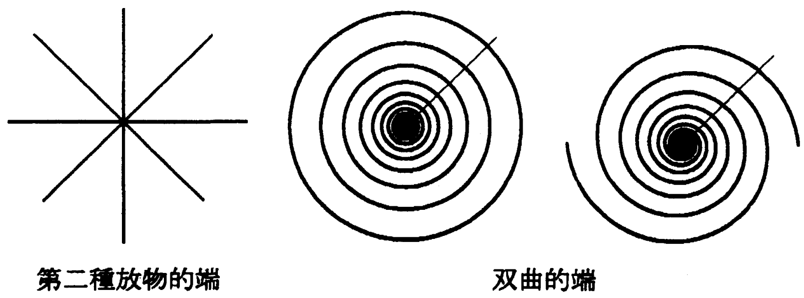


図 2　第二種放物的端と双曲的端での特異点集合

が得られ，これを，極小曲面の Osserman の不等式とよぶ．双曲的ガウス写像は，曲面のガウス曲率と直接関係がないが，その次数に対して極小曲面の場合と同じ不等式が成立するので，定理 7 を Osserman 型不等式とよぶことにする．双曲型空間の CMC-1 曲面についても，双曲的ガウス写像に関する Osserman 型の定理が成立する [8].

定理 7 の不等式は，H^3 の CMC-1 曲面の場合 [8] と同様に示すことができる．等号条件を示すためには，端の挙動を詳しく観察しなければならない．完備な CMC-1 面は，端の近傍には特異点をもたないから，各端は CMC-1 はめこみ

$$(*)\qquad f\colon \Delta^* = \{z \mid 0 < |z| < 1\} \longrightarrow S^3_1.$$

とみなすことができる．正則もちあげ F は，Δ^* の普遍被覆 $\widetilde{\Delta}^*$ でしか定義されないが，$f = \pi_S \circ F = Fe_3{}^t\overline{F}$ は Δ^* 上で well-defined である．したがって，$F \circ \tau = F\rho_f$ を満たす行列 $\rho_f \in \mathrm{SU}(1,1)$ が存在する．ただし τ は Δ^* の原点の回りのループに対応する，普遍被覆 $\widetilde{\Delta}^*$ の被覆変換である．

ここで，$\mathrm{SU}(1,1)$ は $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ と同型であるが，これは双曲平面 H^2 に等長変換として作用する．したがって，$\mathrm{SU}(1,1)$ の各元は**楕円的**，**放物的**，**双曲的**に分類される．

定義 8. 端 p_j は，行列 ρ_f が楕円的（放物的，双曲的）であるとき楕円的（放物的，双曲的）とよばれる．

補題 9. 端 $(*)$ の第二ガウス写像 g として，次の形のものをとることができる：

- 端が楕円的のとき，$g(z) = z^{\mu}h(z)$ $(\mu \in \boldsymbol{R})$,
- 放物的のとき $\hat{g}(z) = h(z) + \log z$,
- 双曲的のとき $\hat{g}(z) = z^{i\mu}h(z)$ $(\mu \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\})$.

ただし h は $\Delta*$ 上の 1 価正則関数，$\hat{g} = -i(g+1)/(g-1)$ である．

定義 10. 補題 9 の端が**有限型**であるとは，関数 h が 0 に高々極をもつことである．さらに，有限型な放物的端が**第一種**（**第二種**）であるとは $h(0) \neq \infty$ （$h(0) = \infty$）となることである．

このとき，次を示すことができる：

定理 11 ([5]). 完備な端は有限型である．さらに，それは楕円的であるかか，第一種放物的である．とくに，完備双曲的エンドは存在しない．

第二種放物的端と双曲的端が存在しないことは，特異点集合が $\{|g|=1\}$ であたえられること，有限型であることと補題 9 の形からわかる．実際，これらのケースでは，特異点集合が端に集積する（図 2）ので，完備ではありえない．

定理 7 の後半は，楕円的および第一種双曲的端の漸近挙動を解析することにより示すことができる．

参考文献

[1] R. Aiyama and K. Akutagawa, *Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in* $H^3(-c^2)$ *and* $S^3_1(c^2)$, Ann. Global Anal. Geom. (1), **17** (1998), 49–75.

[2] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque, **154–155** (1987), 321–347.

[3] S. Fujimori, *Spacelike CMC* 1 *surfaces with elliptic ends in de Sitter* 3*-Space*, Hokkaido Math. J., **35** (2006), 289–320.

[4] S. Fujimori, *Spacelike mean curvature* 1 *surfaces of genus* 1 *with two ends in de Sitter* 3*-space*, Kyushu Journal of Math., **61** (2007) 1–20.

[5] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Spacelike mean curvature one surfaces in de Sitter* 3*-space*, preprint, arXiv:0706.0973 [math.DG], 2007.

[6] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, to appear in Mathematische Zeitschrift, DOI:10.1007/s00209-007-0250-0.

[7] S. Lee and S.-D. Yang, *Spacelike constant mean curvature* 1 *trinoids in de Sitter three-space*, Osaka J. Math., **43** (2006), 641–663.

[8] M. Umehara and K. Yamada, *A duality on CMC-1 surface in the hyperbolic3-space and a hyperbolic analogue of the Osserman Inequality*, Tsukuba J. of Math., **21** (1997), 229–237.

[9] M. Umehara and K. Yamada, *Comoplete surfaces of constant mean curvature*-1 *in the hyperbolic* 3*-space*, Ann. of Math. **137** (1993), 611–638.

[10] M. Umehara and K. Yamada,
Maximal surfaces with singularities in Minkowski space, Hokkaido Math. J., **35** (2006), 13–40.